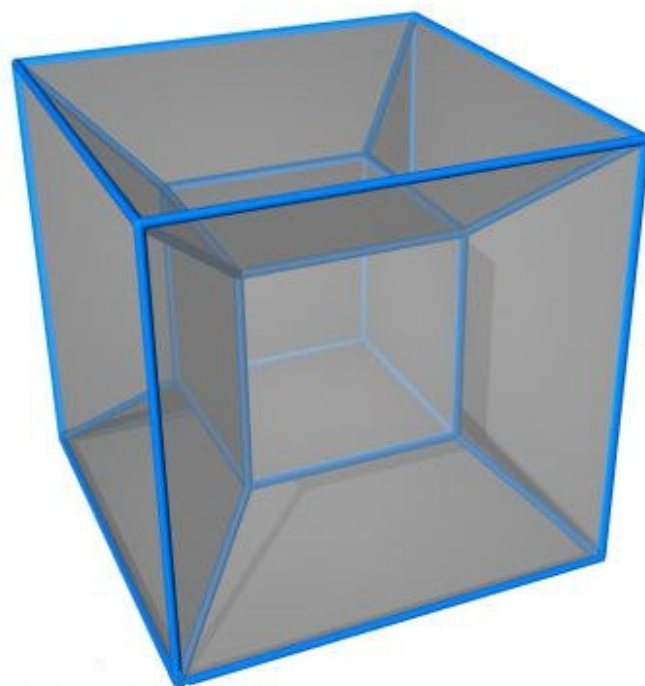


# LA QUARTA DIMENSIONE

## DA FLATLANDIA ALL'IPERCUBO



Michele Nicolussi  
Classe VG

A.S. 2007/2008  
Liceo Classico "G. Carducci", Bolzano

## **INDICE**



### **PREMESSA**

pag.2



### **FILOSOFIA**



Positivismo

pag.3



Crisi del Positivismo

pag.3

pag.4



### **INGLESE**



The Victorian age and its compromises

pag.5



Edwin Abbott Abbott

pag.5



Flatland – The Plot

pag.6



Flatland – History and Features

pag.7



Social Satire in Flatland

pag.7

pag.8



### **MATEMATICA**



La quarta dimensione e Flatlandia

pag.10



Poligoni e poliedri

pag.10



Costruire un ipercubo

pag.11



Ipercubo – Caratteristiche

pag.12



Ipercubo – Visualizzazione

pag.13



Politopi regolari

pag.14

pag.16



### **BIBLIOGRAFIA**

pag.18

## ***PREMESSA***

La mia scelta è ricaduta su tale argomento in seguito all'esperienza vissuta grazie al progetto "*La Bottega del Matematico*", tenutosi a Salorno tra il 3 ed il 6 marzo 2008. Ho preso parte ad un corso di approfondimento intitolato "*Cubi e Ipercubi*", ideato e coordinato dalla docente dell'Università degli Studi di Milano, prof.ssa Maria Dedò.

La tematica ha da subito attratto il mio interesse, che peraltro era già sorto da letture personali precedenti. Ulteriori contatti tramite e-mail con la prof.ssa Dedò mi hanno convinto a tentare questa incursione nell'universo quadridimensionale, mantenendo ben saldo e presente uno dei concetti più spesso citati nel corso della Bottega del Matematico: l'analogia, attraverso cui diviene quasi immediata la comprensione del mondo a quattro dimensioni.

# FILOSOFIA

## Il Positivismo

*“Le caractère fondamental de la philosophie positive est de regarder tous les phénomènes comme assujettis à des lois naturelles invariables, dont la découverte précise et la réduction au moindre nombre possible sont le but de tous nos efforts, en considérant comme absolument inaccessible et vide de sens la recherche de ce qu'on appelle les causes soit premières, soit finales.”*

*Auguste Comte, Cours de philosophie positive*

Il Positivismo si configura come un movimento filosofico e culturale estesosi a livello europeo nella seconda metà del XIX secolo, che affonda le proprie radici nella Francia del primo Ottocento. Il termine viene coniato da Henry Saint-Simon, filosofo parigino, per indicare un pensiero “positivo” nel senso di reale, concreto, sperimentale ed anche pratico e valido, in opposizione a ciò che è metafisico, astratto ed inutile. Il Positivismo comprende una vasta gamma di pensatori molto diversificati per formazione intellettuale e temi trattati, ma nella corrente, caratterizzata da un’esaltazione della scienza e una fiducia incondizionata nel progresso tecnologico, possiamo ritrovare alcune convinzioni di fondo:

- la scienza è l’unica conoscenza possibile, rendendo dunque inutile la metafisica. Più che la causa scatenante dei fenomeni, il “perché”, si tenta di scoprire “come” essi sono e da quali leggi siano regolati i loro comportamenti;
- il metodo scientifico è l’unico valido nella realtà e perciò deve essere esteso a tutti i campi del sapere;
- il progresso della scienza rappresenta la base del progresso dell’intero genere umano, ormai liberato dalle superstizioni e dalle credenze irrazionali, capace ora di risolvere i problemi logicamente;
- l’uomo, grazie alla ragione e alla logica, ha la capacità di prevedere gli avvenimenti e può perciò intervenire e incidere sulla natura.

Il clima generale dell’epoca facilitò la diffusione dell’ottimismo entusiastico che permeava il pensiero positivista. Lo sviluppo dell’industria portò ad un periodo di fioritura economica in tutta Europa, particolarmente in Inghilterra; l’agricoltura venne investita da un processo intensivo di meccanizzazione che moltiplicò le capacità produttive e favorì l’esodo dalle campagne alle città, in cui si delinearono nuovi modelli urbani. Ciò condusse anche alla nascita delle idee socialiste ed all’organizzazione delle prime associazioni operaie.

La borghesia divenne il fulcro dell’intero movimento positivista, sebbene anche le classi sociali popolari si dimostrassero entusiaste dei progressi della scienza e della tecnica, promesse di migliori condizioni di vita.



Figura 1: Auguste Comte, principale esponente del Positivismo

Molti cercarono di applicare il metodo scientifico agli ambiti più disparati, compresi quelli che riguardavano l'uomo e la società: nacque dunque per opera di Comte la sociologia. Oltre alla psicologia umana, venne riveduta in ottica rigorosamente scientifica anche l'origine biologica dell'uomo: nel 1857 Darwin pubblicò "Sull'origine della specie", il celebre trattato in cui vennero teorizzati la selezione naturale e l'evoluzionismo.

## *La crisi del Positivismo*

*"As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain;  
and as far as they are certain, they do not refer to reality."*

*Albert Einstein, Sidelights on Relativity*

Nel periodo compreso tra la fine dell'Ottocento e la prima guerra mondiale il clima culturale caratterizzato dal Positivismo mutò progressivamente: è un periodo di cambiamenti radicali nella società. L'economia rallentò, tanto da forzare gli Stati verso una politica protezionista e addirittura imperialistica. Il sistema di valori e di certezze che la borghesia aveva avanzato e sostenuto negli anni precedenti andò incontro ad una profonda crisi.

Sul piano strettamente filosofico, si assistette alla nascita di nuove correnti, irrazionalistiche e vitalistiche, diversissime tra loro ma accomunate dalla rottura con la costruzione logica razionale del Positivismo: vennero esaltati fattori quali l'istinto, lo slancio vitale e la volontà soggettiva. Schopenhauer suppose l'esistenza del "velo di Maya", sotto il quale è celata la verità; all'uomo è dunque conoscibile solo un'apparenza, poiché il dato sensibile è falsificato.

La crisi del Positivismo nelle scienze è molto più evidente se si prende in considerazione l'importante innovazione teoretica della fisica che minò i fondamenti stessi della meccanica classica: Albert Einstein rese nota nel 1905 la sua teoria della relatività, sradicando le più basilari nozioni di concetti come tempo e spazio, su cui Kant aveva fatto particolare affidamento. Molte altre scoperte distrussero i pilastri teorici delle scienze: la dimostrazione del secondo principio della termodinamica distrusse la certezza nella reversibilità che aveva per lungo tempo rafforzato le teorie fisiche di Newton. L'idea che si potessero prevedere determinati fenomeni fisici conoscendo le condizioni iniziali venne sradicata dal principio di indeterminazione di Heisenberg, secondo cui anche la semplice osservazione interferisce con il fenomeno considerato. Di lì a poco, nel 1932, Gödel avrebbe definitivamente decretato la fine della logistica, ponendo forti limiti alle possibilità di applicare il rigore matematico ad altri campi.

In effetti, già da molti anni era iniziato lo studio delle cosiddette geometrie non-euclidee, che ignoravano il quinto postulato ma si rivelavano più appropriate per analizzare determinate situazioni. Lobacevskij e Bolyai giunsero separatamente alla creazione di una geometria iperbolica, mentre Riemann ne propose una ellittica. In tali geometrie, nozioni basilari come la somma degli angoli interni di un triangolo non erano più valide. Ecco dunque farsi largo l'ipotesi che i postulati non rappresentino verità evidenti e reali, ma semplicemente ipotesi di partenza condivise, da cui far discendere un corpus coerente di leggi. Pertanto i precedenti modelli della fisica si rivelarono insufficienti come schemi esplicativi. Le vecchie certezze furono sistematicamente smantellate, mentre venivano elaborati e proposti nuovi modelli interpretativi del mondo e dell'universo intero.

# ENGLISH

## *The Victorian age and its compromises*

*"It was the best of times, it was the worst of times,  
it was the age of wisdom, it was the age of foolishness,  
it was the epoch of belief, it was the epoch of incredulity,  
it was the season of Light, it was the season of Darkness,  
it was the spring of hope, it was the winter of despair".*

*Charles Dickens, A Tale of Two Cities*

This period takes its name from *Queen Victoria*, whose reign started in 1837 and concluded in 1901, becoming the longest in English history. It was a period of rapid progress, imperial expansion and social reforms. The rapid extension of industrialization fostered a very strong trade with all colonies. Britain had become the wealthiest and most powerful nation in the world; one quarter of the lands above sea-level was part of its Empire. The mid 19<sup>th</sup> century was also a time of great technological innovations, such as the steam-powered machinery and consequently the railway. In 1851 the *Great Exhibition* took place, a huge trade fair which wanted to show the British leading position as an imperial power: around 200,000 objects from the colonies were displayed and more than three million people visited the exposition.



Figure 2: Queen Victoria

The society went through many reforms, in a progressive policy supported by the Queen herself. Throughout her reign, the right to vote was gradually extended to all men, in order to incorporate the working classes in the society: this was the best way to avoid mass revolutionary insurrections as happened in continental Europe.

Although Victorians may be considered progressive in theory, much of the fundamental *economic inequity* remained and grew up. Among poor classes, in fact, misery and distress were still widespread. The new urban conditions, made worse by the growth of slums, had created a lot of health problems. Whole families were often crowded in one single room, where lack of hygiene seldom led to cholera. The New *Poor Law* of 1834 had not been a solution for these problems, and the creation of the much hated "*workhouses*" (so well described and denounced by Dickens) had often made life a hell for poor people. Poverty, whether the result of bad luck or thoughtless behavior, was regarded as a crime and penalized as such. Debtors, for example, were still punished with jail, and life in prison was appalling. Education, too, had its problems. As a matter of fact, teachers were often incompetent and corporal punishment was still regularly applied to maintain discipline.

This particular situation, which saw prosperity and progress on one hand, and poverty and injustice on the other, which opposed ethical conformism to corruption, and which separated private life from public behavior, is usually referred to as the "*Victorian Compromise*". Values such as church, family, sanctity of childhood and home applied only to those who could afford them.

The idea of respectability distinguished the middle class from the lower one. *Respectability* was a mixture of both morality and hypocrisy, severity and conformity to social standards. Manners underwent a deep change in this period. Under the influence of Queen Victoria herself, the age turned excessively puritanical. Middle-class women in general were to observe a strict code of behavior, which expected them to be frail, submissive and pure, confined within the family walls. Any misconduct could ruin the reputation of these so-called “*angels in the home*”. Moreover, *childhood* was considered a golden age among the bourgeoisie, even though most children from the lower classes had to work ten or twelve hours a day in factory in order to gain the money to survive.

## *Edwin Abbott Abbott*



Figure 3: a picture of Abbott

Edwin Abbott Abbott was born on December 20<sup>th</sup>, 1838 in Marylebone, being the eldest son of Edwin Abbott (1808–1882), headmaster of the Philological School, and his wife, Jane Abbott (1806–1882). His parents were first cousins, which explains how could Edwin have “Abbott” as both a surname and a middle name. He was educated at the City School of London and in 1857 Abbott entered *St. John’s College* in Cambridge, always taking excellent notes in mathematics as well as in classics and theology. He became an Anglican priest in 1863 and in the same year he got married to Mary Elizabeth Rangeley, who gave him one son and one daughter.

In 1865, at the early age of twenty-six, he was appointed headmaster of the *City of London School*, where he made many innovations to the curriculum taught to the pupils; although

graduated in *theology*, he had a reverence for physical science not often found among the classical scholars of that time. Therefore he made an elementary knowledge of chemistry compulsory throughout the upper school. Edwin’s interest in philology made him write the “*Shakespearian Grammar*” (1870) and “*How To Write Clearly*” (1872), even if most of his works had a religious topic: “*Philocristus*” (1878) and “*Onesimus*” (1882) are the most renowned among his more than forty books. In 1884 Abbott published “*Flatland*”, a key document in the life of this remarkable man. He retired in 1889, before being fifty, in order to devote more time to his literary efforts.

Edwin Abbott Abbott died of influenza at his home on October 12<sup>th</sup> 1926 in Hampstead, near London. He was buried a couple of days later with great honors.

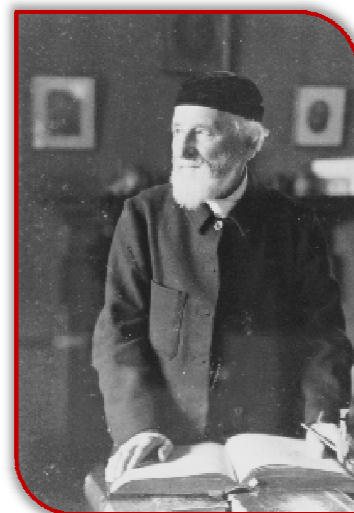


Figure 4: an older Abbott



## *Flatland – The Plot*

The first part of the story is set in a two-dimensional world referred to as Flatland. The narrator, simply calling himself A. Square, guides the reader through some of the implications of his life in two dimensions. The society is strongly hierarchical, dividing his citizens into classes according to the number of sides they own. The Square has a dream about a visit to a one-dimensional world (Lineland), and attempts to convince the realm's ignorant monarch of a second dimension, but finds that it is essentially impossible to make him see outside of his eternally straight line.

The narrator is then visited by a three-dimensional sphere, which he cannot comprehend until he sees Spaceland for himself. This sphere, visits Flatland at the turn of each millennium to introduce a new apostle to the idea of a third dimension hoping to succeed in educating the population of Flatland about the existence of Spaceland. Being in Spaceland and therefore outside Flatland, the sphere and the square are able to observe the leaders of Flatland secretly acknowledging the existence of the sphere and prescribing the silencing of anyone found preaching the existence of Spaceland and the third dimension. After this proclamation is made, many witnesses are massacred or imprisoned (depending on the caste they belong to).

After the Square's mind is opened to the idea of new dimensions, he tries to convince the Sphere of the theoretical possibility of the existence of a fourth (and then fifth, and sixth ...) spatial dimension. Offended by this presumption and incapable of comprehending other dimensions, the Sphere sends his impudent student back to Flatland.

The Square has another dream, in which the Sphere visits him again, this time to introduce him to Pointland. The point (sole inhabitant, monarch, and universe in one) perceives any attempt at communicating with him as simply being a thought originating in his own mind.

The Square recognizes the connection between the ignorance of the monarchs of Pointland and Lineland with his own (and the Sphere's) previous ignorance of the existence of other dimensions. Once returned to Flatland, the Square finds it difficult to convince anyone of Spaceland's existence, especially after official decrees are announced - anyone preaching the lies of three dimensions will be imprisoned or even executed. Eventually the Square himself is imprisoned for just this reason.

## *Flatland – History and Features*

Flatland was written and first published in *November 1884*. The second edition appears just one month later, completely revised and with a *new introduction* by the author himself. One year later the book reached the American readership; nowadays the novel is available in *eight different translations*, among which there is the Italian one, first distributed in 1966. Dozens of English editions were published throughout all these years: a special version was released in 1926, right after the death of Abbott, with an additional introduction by William Garnett, a very close friend of Edwin; in 1983 another version appeared with an exclusive preface by the illustrious writer Isaac Asimov. Flatland is still popular and several authors in modern times took it as their inspiration; moreover, its message about the fourth and higher dimensions has special appeal today thanks to the new technologies human kind now has to interact with these fictitious dimensions.



Edwin Abbott Abbott was not the first person to create a two-dimensional universe inhabited by flat beings, but he was the first to explore what it would mean for such individuals to interact with creatures from a higher dimension. Abbott himself had never written anything concerning geometry before this novel, being a theologian and not a mathematician. Nevertheless, other books of him such as *"Philochristus"* and *"Onesimus"* present characters who have an extraordinary encounter with a figure out of the rational world, characters have been used to before (respectively Jesus or St. Paul). The heroes are totally transformed by the revelation of a higher order of beings, but in both cases, trying to spread the truth in their society, they only face frustration and persecution.

Two particular people could have affected Abbott in writing such a unique story. The former is one of his best students, *William Garnett*, who was first boy in mathematics at the City of London School. He remained in contact with Abbott throughout his career, especially when Garnett became chief assistant of the eminent physicist James Clerk Maxwell, whose studies often dealt with higher dimensions. William pronounced a touching speech at Abbott's funeral and was therefore the obvious choice to write the introduction of the 1926 edition. The other encounter which probably affected Abbott is the one with the works of *Charles Howard Hinton*. He was 15 years younger than Edwin, educated in mathematics at Oxford and very interested in non-traditional philosophy. They possibly met in person by Howard Candler, close friend of both. Hinton eventually left England moving to America, where he kept on his work on the physics and philosophy of the fourth dimension.

*Flatland* is divided into twenty-two sections, grouped in two parts: "This World" and "Other Worlds", clearly referring to the turning point in the narration represented by the first dream of A Square, in which the one-dimensional universe *Lineland* is illustrated. Both parts, as well as the book itself, are introduced by quotes from different Shakespeare's works, revealing Abbott's admiration for this great author. These extracts are actually slightly modified, in order to infer the existence of many other worlds. The novel is conceived as a collection of memories of the narrator, who is at the same time the main character. Even the dedication appears to be written by the two-dimensional being, addressing himself to the inhabitants of *Space* and a mysterious H.C. in particular; this refers, as Edwin suggested, to his close friend Howard Candler. The Square's hope is that his memoirs will help people to open up their minds to higher dimensions.

## *Social Satire in Flatland*

*"Besotted Being! You think yourself the perfection of existence, while you are in reality the most imperfect and imbecile."*

*Edwin Abbott Abbott, Flatland*

The first half of this little masterpiece is reserved to a long dissertation explaining some of the social habits in *Flatland*. Abbott uses a subtle irony in giving this information in order to underline and criticize several aspects of the Victorian society.



Figure 5: the first edition of *Flatland*

*"Since women are deficient in Reason but abundant in Emotions, they ought no longer to be treated as rational, nor receive any mental education." [...] "They are wholly devoid of brain-power and have neither reflection, judgment nor forethought, and hardly any memory."*

The first subject that has to be addressed is the treatment of women. According to Abbott's social reformist spirit, learning opportunities should have been equal, although Victorian society was likely to put women on a second level. As a matter of fact, they have been permitted to attend classes at university only since late XIX century. Many of the young women who gained entrance to a superior teaching, like Abbott's daughter, had received most of their education at home. In Flatland, females are presented as totally incapable of understanding basic teachings. Moreover, they are just straight line segments, in a world in which cerebral skills are linked to the number of sides a figure has. Women also embody abstract concepts such as loyalty and love, so difficult to describe in a scientific language and therefore pointless in a utilitarian world – for instance Flatland or England. Men in Flatland consider important only what is rational and quantifiable, but women have other qualities such as genuine feelings. For that reason, men invented two separated languages, one to talk among them about the "important" things of life and science, the other to chat with women, who are considered simple-minded if not stupid.

*"I for my part have never known an Irregular who was not also what Nature evidently intended him to be – a hypocrite, a misanthropist and, up to the limits of power, a perpetrator of all manners of mischief."*

Another aspect of the satire in Abbott's work is the treatment of those who did not fit in. In the rigid Victorian society there was little tolerance for irregularity. As a matter of fact, it was often associated with criminal tendency. The same happens in Flatland: there are some figures that are not geometrically regular and are therefore discriminated. Isosceles triangles with a very acute angle are kept in chains and shown during lessons as objects to be studied by Flatland's pupils. The narrator spends some words in explaining how do schools spare a lot of money in letting them starving. And if a man from a higher class was born with a small irregularity, there are two options: either a surgical operation or the internment in an asylum for the rest of their life.

*"As to the doctrine of the Circles, it may briefly be summed up in a single maxim, Attend to your Configuration." [...] "The duty of fathers is to subordinate their own interest to those of posterity."*

Furthermore, Abbott criticizes Victorian culture because the social hierarchy was too rigid and climbing to a higher class was almost impossible. In Flatland, Edwin takes this aspect to the limit: the profession and the social status of a person totally depends on the number of sides he has. A physical peculiarity defines the whole life (this referring also to the slavery of the black people). Even though it is true that the son would have an extra side and so on – thus elevating the nobility throughout generations – a square dies a square. The entire existence of anybody would be spent to ensure his children a better future and protecting them. As a matter of fact, according to the Victorian morality, childhood was a golden age and had to be sanctified; the older must respect the younger, which is to say the opposite than any past etiquette had ever stated before.

It is evident that Edwin Abbott strongly disagreed with the Victorian compromises. He preferred the kind of education that allowed people to rise on the basis of merit rather than of the social class into which they were born. The prevailing system is the target of his satire in Flatland.

# MATEMATICA

## La quarta dimensione e Flatlandia

*"Be patient, for the world is broad and wide."*

*Shakespeare, Romeo and Juliet*

Benché sia abitudine comune pensare che la quarta dimensione consista nella "dimensione tempo", così come la teoria della relatività di Einstein suggerisce, è più corretto dire che essa è solo una delle possibili interpretazioni. L'idea di una quarta dimensione spaziale inizia a svilupparsi già durante la seconda metà dell'Ottocento.

Uno dei primi racconti che ha aperto l'immaginario collettivo al pensiero di un universo costituito da dimensioni superiori alla terza è Flatlandia, di Edwin Abbott Abbott. Flatlandia è un mondo abitato da sole figure piane le quali hanno una capacità visiva che si orienta solo all'interno del piano stesso senza possibilità di "guardare" nella terza dimensione. Ogni essere vivente vede perciò il proprio mondo come una linea retta, in quanto il proprio sguardo non può sollevarsi verso l'alto. È lo stesso protagonista a fornirci un pratico esercizio per comprendere facilmente la ristrettezza della visuale in Flatlandia: porre una moneta sul tavolo ed avvicinare gradualmente i propri occhi al piano, fino a scorgere solamente un segmento, cioè il fianco della moneta. Per quanto assurda e limitata possa sembrare una vita presso un tale piano, Abbott ci mostra come esseri bidimensionali possano organizzarsi in maniera compiuta per il riconoscimento reciproco e per una pacifica convivenza. La limitata capacità visiva non permette loro di riconoscere l'altezza, e l'unico modo che il protagonista, un quadrato, ha di riconoscere un triangolo è quello di osservare come i suoi lati (che si sviluppano nella profondità del piano) vadano a sbiadirsi grazie alla leggera nebbia che regna sovrana su Flatlandia. Questa introduzione, per quanto fantasiosa, è fondamentale per comprendere che la percezione dell'uomo di vivere in un mondo tridimensionale può essere una limitazione alla conoscenza della realtà se essa fosse di dimensione superiore. Le capacità limitate di ogni essere vivente di qualsiasi dimensione si adoperano affinché egli sviluppi una concezione sola dello spazio in cui vive. Non a caso, il quadrato chiama il suo universo bidimensionale con il nome di Spazio, e così si comporta anche il re del regno monodimensionale.

Il viaggio che ci presenta Abbott è un viaggio basato sull'analogia; egli aveva infatti intuito che per spiegare al meglio l'esistenza di una quarta dimensione a un essere tridimensionale quale siamo noi bisognasse presentare un essere tridimensionale che tentasse di spiegare a un essere bidimensionale l'esistenza di una dimensione superiore: la terza. La difficoltà che una sfera (personificata) ha di spiegare il suo mondo a un essere dimensionalmente inferiore è la stessa che l'uomo ha di spiegare e concepire pienamente una dimensione che va oltre le sue capacità intellettive. Abbott espone la tesi, per cui un essere a  $n$  dimensioni potrà manifestare in un mondo



Figura 6: in Flatlandia la Sfera appare un Cerchio

a (n-1) dimensioni solo una sezione (n-1) dimensionale del suo stesso corpo. Ma lo scorrere del suo corpo presso tutto lo spazio inferiore mostrerà, seppur per sezioni, il proprio corpo dimensionalmente maggiore, potrà cioè mostrarsi nella sua completezza solo come somma di sezioni diverse del corpo nel tempo.

Le potenzialità dell'analogia risultano determinanti per far comprendere al quadrato le caratteristiche dei solidi geometrici, tanto che egli si spinge a ipotizzare l'esistenza di politopi, cioè figure geometriche a quattro dimensioni. A questo punto però è la sfera, guida del quadrato durante tutto il suo viaggio nell'universo a tre dimensioni, a rifiutare tale teoria e a rispedirlo malamente in Flatlandia.

## Poligoni e poliedri

*“The little Hexagon meditated on this a while and then said to me: «But you have been teaching me to raise numbers to the third power: I suppose  $3^3$  must mean something in Geometry; what does it mean?». «Nothing at all – replied I – not at least in Geometry, for Geometry has only two dimensions.»”*

*Edwin Abbott Abbott, Flatland*

Si definiscono poligoni regolari quei poligoni aventi tutti i lati e gli angoli congruenti fra loro. È facile rendersi conto che, nel piano, esistono infiniti poligoni di questo genere: per qualsiasi numero  $n \geq 3$  è possibile costruirne uno con  $n$  lati.

Altrettanto non si può dire per i poliedri regolari, ovvero per delle figure tridimensionali con due caratteristiche ben precise:

1. le facce devono essere poligoni regolari congruenti tra loro;
2. tali poligoni devono concorrere in ugual numero ad ogni vertice.

Sono proprio queste due caratteristiche definitive a limitare il numero di possibili poliedri regolari. Inoltre, va aggiunta la condizione per cui ad ogni vertice si congiungono minimo tre poligoni; è dunque necessario che la somma dei loro angoli sia inferiore a  $360^\circ$ , altrimenti non sarebbe possibile “ripiegare” la struttura in uno spazio 3d e formare il poliedro. Prendendo innanzitutto il triangolo equilatero, i cui angoli misurano  $60^\circ$ , ci accorgiamo che è possibile far incontrare in un vertice 3, 4 o 5 facce. Se dovessimo considerare sei triangoli avremmo  $60^\circ \cdot 6 = 360^\circ$ , quindi una tassellazione del piano, ma non lo sviluppo di un poliedro. Le tre combinazioni valide danno origine rispettivamente al tetraedro (4 facce), all'ottaedro (8 facce) e all'icosaedro (20 facce). Passando al quadrato, è possibile trovare una sola composizione, quella

di tre quadrati ( $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ ); tale eventualità dà luogo all'esaedro (6 facce), più spesso chiamato semplicemente cubo. Anche con i pentagoni, presi tre a tre, si può dar vita ad un poliedro regolare, il dodecaedro (12 facce), poiché la somma rimane inferiore a  $360^\circ$ : infatti  $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$ . Dall'esagono in poi si impone un limite non valicabile: le somma di tre angoli di un esagono regolare dà come risultato  $360^\circ$  e quindi non soddisfa le condizioni necessarie.

Tali poliedri venivano studiati già nell'antichità classica. Platone (da cui il nome di solidi platonici) associò ad ognuno di essi un elemento: al tetraedro il fuoco, al cubo la terra, all'ottaedro l'aria, all'icosaedro l'acqua, mentre ritenne che il dodecaedro fosse la forma dell'universo. Essi furono

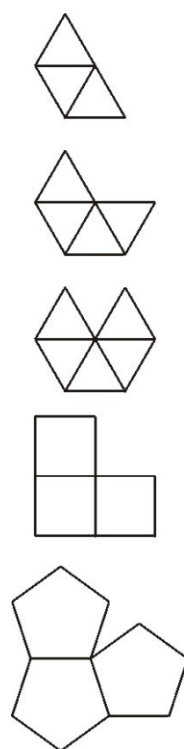


Figura 7: le composizioni che generano poliedri regolari

poi studiati con maggior rigore da Euclide; nel suo celebre trattato, gli Elementi, egli ne descrive la costruzione.

Ogni solido platonico può essere anche definito da una notazione  $\{p, q\}$  dove:

$p$  = il numero di lati di ogni faccia (o il numero di vertici di ogni faccia) e

$q$  = il numero di facce che si incontra in ogni vertice (o il numero di spigoli che si incontrano in ogni vertice).

La sigla  $\{p, q\}$ , chiamata notazione di Schläfli, dà una descrizione sintetica e precisa del poliedro, indicandone univocamente la conformazione:

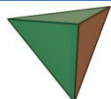


Caratteristiche dei poliedri regolari e semiregolari					
Poliedro		Notazione di Schläfli	Vertici	Spigoli	Facce
	Tetraedro	{3,3}	4	6	4
	Cubo	{4,3}	8	12	6
	Ottaedro	{3,4}	6	12	8
	Dodecaedro	{5,3}	20	30	12
	Icosaedro	{3,5}	12	30	20

Tabella 1: caratteristiche principali dei cinque solidi platonici

## Costruire un ipercubo

*“Se la quarta dimensione esiste e noi ne possediamo solo tre, ciò significa che noi non abbiamo un’esistenza reale, che esistiamo solo nell’immaginazione di qualcuno e che tutti i nostri pensieri, sentimenti ed esperienze hanno luogo nella mente di qualche altro essere superiore, che ci immagina. Siamo solo prodotti della sua mente e tutto il nostro universo non è altro che un mondo artificiale creato dalla sua fantasia.”*

*P. D. Ouspensky, The Fourth Dimension*

Per visualizzare finalmente un ipercubo, anche detto tesseracto, si rivela prezioso il ricorso all’analogia.

Possiamo visualizzare mentalmente la costruzione di un ipercubo per stadi successivi, partendo da un semplice punto, di dimensione zero. Esso, spostandosi lungo una retta di una distanza unitaria,

va a formare un segmento, appartenente ad un universo ad una dimensione. Facciamo ora compiere a questo segmento una traslazione (sempre di lunghezza unitaria) secondo una direzione perpendicolare a se stesso: otteniamo un quadrato, oggetto bidimensionale. Per arrivare al cubo, sarà necessario muovere il quadrato in una direzione perpendicolare al piano su cui giace, spostandosi

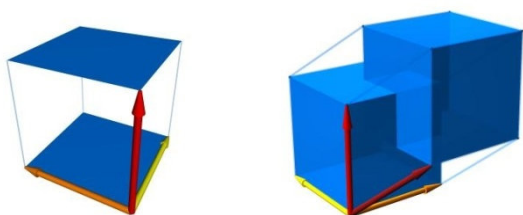


Figura 8: dal quadrato al cubo, all'ipercubo

sempre della medesima lunghezza. Da qui in poi la capacità visiva dell'uomo non è di grande aiuto, ma questo non significa che la mente non possa immaginare una quarta direzione, ortogonale alle tre precedenti, lungo la quale il cubo possa traslare dando vita ad un tesseracto (Figura 8).

## *Ipercubo - Caratteristiche*

*"O brave new worlds, that have such people in them!"  
Shakespeare, The Tempest*

Se preferissimo utilizzare un metodo analitico, potremmo avvalerci delle coordinate spaziali, come si è soliti fare nel piano cartesiano. In tale piano sono sufficienti due coordinate per identificare un punto, poiché esso rappresenta un universo bidimensionale. Nello spazio, come noi lo intendiamo, servono tre valori per individuare univocamente un punto. È facile intuire che saranno necessari quattro valori ordinati per poter trovare un punto nello spazio 4d. Ricorriamo ancora una volta all'analogia e all'intuizione. È possibile tracciare un quadrato indicando i vertici con le coordinate  $(\pm 1; \pm 1)$ . Le varie combinazioni possibili infatti sono quattro, tanti quanti i vertici di un quadrato. Analogamente, siamo in grado di individuare un cubo con le coordinate  $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ , stringhe che indicano gli otto vertici dell'esaedro. Il salto quadridimensionale è semplificato ed è sufficiente aggiungere una quarta coordinata corrispondente alla quarta direzione, ortogonale alle precedenti. I vertici sono determinati da  $(\pm 1; \pm 1; \pm 1; \pm 1)$ : essi sono dunque 16. Generalizzando, i vertici di un ipercubo di  $n$  dimensioni sono  $2^n$ . Al medesimo risultato si giunge anche per un ragionamento sul metodo di costruzione affrontato nel precedente paragrafo. Il punto, andando a formare la linea, da vita a due estremi. Essi, a loro volta, si raddoppiano quando traslano per costruire il quadrato, raggiungendo quota quattro. Per stadi successivi, si passa agli otto vertici di un cubo e ai 16 di un ipercubo.

Diverso il conteggio degli spigoli, costituenti monodimensionali degli oggetti geometrici. Mentre un punto sicuramente non ha spigoli, possiamo dire che un segmento abbia uno spigolo, cioè se stesso. Sappiamo che un quadrato ha quattro lati (che anche adesso possiamo considerare spigoli) ma è fondamentale comprendere come essi vengano originati. Nel passaggio dinamico tra linea e quadrato, viene a crearsi un segmento di "partenza" e uno di "arrivo", collegati da due altre linee, una per ogni estremo o vertice del segmento di partenza. Proviamo ad applicare questo ragionamento al successivo stadio, tra 2d e 3d; esistono i 4 spigoli del quadrato di partenza e i 4 del quadrato di arrivo, a cui ne vanno aggiunti altri 4, tanti sono i vertici di un quadrato. La somma dà 12, cioè proprio il numero di spigoli in un cubo. Analogo ragionamento è possibile per determinare il numero di facce quadrate di un cubo: una di partenza e una di arrivo, più altre 4 generate dal movimento dei lati del quadrato. Il risultato conferma che il cubo ha sei facce.

Un procedimento analogo è dunque applicabile anche nel passaggio all'universo a quattro dimensioni. Se gli spigoli di un cubo sono 12, quelli di un ipercubo saranno uguali alla somma di due cubi (partenza e arrivo) più il numero dei vertici di un cubo: quindi  $12 \cdot 2 + 8 = 32$ . Passando al calcolo dell'ammontare delle facce quadrate di un tesseracto, contiamo due volte il numero di facce bidimensionali del cubo aggiungendoci gli spigoli, che nello spostamento lungo la quarta direzione creano nuovi quadrati, dunque  $6 \cdot 2 + 12 = 24$ . Non bisogna però dimenticare i cubi stessi: ogni ipercubo ne possiede 8, cioè i due di partenza e arrivo sommati ai sei generati dal movimento delle sei facce quadrate.

Riassumendo il tutto in una tabella:



Dimensione dello spazio	Vertici	Spigoli	Quadrati	Cubi	Ipercubi
0	1	-	-	-	-
1	2	1	-	-	-
2	4	4	1	-	-
3	8	12	6	1	-
4	16	32	24	8	1

Tabella 2

Come sempre accade in matematica, occorre trovare una generalizzazione che possa spiegare cosa succede ad una qualsiasi dimensione  $n$ . Un metodo sicuramente valido, seppure totalmente empirico, deriva ancora una volta direttamente dal procedimento di costruzione; infatti si può notare come nei precedenti calcoli abbiamo dedotto il numero di un elemento sommando il doppio del valore presente nella casella direttamente superiore e la casella subito a sinistra di quest'ultima. Da un punto di vista più rigorosamente matematico, è possibile pensare la sequenza di valori della dimensione  $n$  come formata dai coefficienti dello sviluppo del binomio  $(2x + 1)^n$ .

## Ipercubo – Visualizzazione

*"An unspeakable horror seized me. There was a darkness; then a dizzy, sickening sensation of sight that was not like seeing; I saw a Line that was no Line, Space that was no Space: I was myself and not myself. When I could find voice, I shrieked aloud in agony: either this is madness or Hell!"*

*Edwin Abbott Abbott, Flatland*

L'intuizione umana è uno strumento molto potente, che però a volte necessita supporti reali, magari visivi. È per questo motivo che fin dai primi scritti teorici nel campo delle dimensioni superiori si cercò di trovare rappresentazioni veritiere e fedeli degli elementi considerati, ipercubo in primis. Anche in questo caso l'analogia fornisce importanti idee e spunti, quindi vale la pena soffermarsi dapprima sui metodi con cui viene raffigurato un cubo su una superficie a due dimensioni. Tornando indietro alla Tabella1, possiamo avere un primo esempio di come un solido venga visualizzato su di un foglio; l'occhio umano è abituato a tali immagini e ricollega immediatamente il disegno al concetto astratto che corrisponde all'esperienza visiva dell'oggetto in tre dimensioni. Questo primo metodo di rappresentare un cubo è chiamata "prospettiva": vengono tracciati due quadrati congruenti sfalsati e i loro vertici vengono uniti a due a due. Nulla vieta perciò di utilizzare questo sistema per rappresentare in un mondo 3d il tesseracto: disegnare due cubi ed unirne i vertici a coppie (Figura9). Dover ridurre tale semplificazione a sole due dimensioni falsa di molto la figura, ma con un po' di allenamento è possibile riconoscere comunque le caratteristiche dell'ipercubo. Va detto che, come nella prospettiva del cubo due spigoli ben distinti sembrano intersecarsi, così l'apparente incrocio tra le facce quadrate dei due ipercubi è solo un'imperfezione della visualizzazione e non rappresenta la reale composizione del politopo.

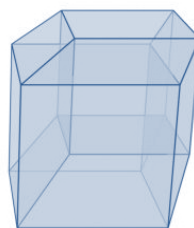
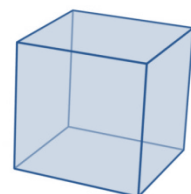


Figura 9: prospettive di un cubo e di un ipercubo



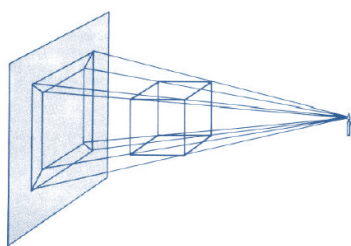


Figura 10: costruzione del diagramma di Schlegel di un cubo

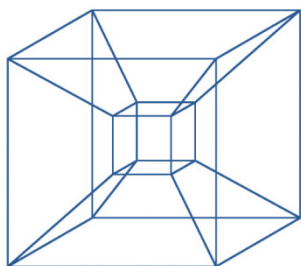


Figura 11: diagramma di Schlegel di un ipercubo

Il secondo metodo è detto “diagramma di Schlegel”, una proiezione centrale con un unico punto di fuga. Questo sistema sfrutta il fatto che, essendo il punto di vista molto vicino alla faccia frontale del cubo, permette di visualizzare tutti gli spigoli senza che essi si sovrappongano mai. Anche questa rappresentazione mantiene inalterati due quadrati, sebbene uno appaia più piccolo e totalmente inserito nell’altro. Le altre quattro facce sono deformate e prendono la forma di trapezi isosceli. Questo è un limite del diagramma di Schlegel, che del resto si ripropone nel

caso del tesseracto (vedi Figura11): due cubi sono facilmente riconoscibili, uno dentro l’altro. Le altre sei 3-facce (cioè facce a tre dimensioni, quindi i cubi) sono di difficile riconoscimento, poiché hanno assunto la forma di tronchi di piramide. Ciascuno di essi ha come base maggiore una faccia del cubo “esterno” e come base minore la corrispondente faccia del cubo “interno”.

Un’ultima via per ottenere la visione della struttura generale consiste nel ricorso allo “sviluppo”, vale a dire alla costruzione, in una dimensione inferiore, di un modello delle parti costitutive dell’oggetto in questione

che poi, ripiegato nella dimensione superiore, possa restituire l’oggetto di partenza. Ancora una volta, ricorriamo allo strumento dell’analogia per avvicinarci progressivamente all’ostica quarta dimensione e partiamo dunque dallo sviluppo di un semplice cubo. Anche i bambini riescono a ritagliare una forma di carta tale da poter costruire un dado: la classica figura a croce composta da sei quadrati. Questi quadrati sono proprio i sei che andranno a formare le facce del cubo delimitare nello spazio tridimensionale il volume del solido. Immedesimandoci, però, negli abitanti di Flatlandia possiamo comprendere alcune difficoltà che la nostra abitudine all’universo tridimensionale ci fa sottovalutare: spigoli, che nello sviluppo sembrano distinti, nella ricostruzione a 3d vanno a coincidere. Le frecce in Figura12 indicano chiaramente ciò a cui la nostra intuizione può arrivare con pochi e semplici ragionamenti. Passando all’ipercubo, sono riconoscibili gli otto cubi costituenti la struttura del tesseracto. Sicuramente, però, è meno chiaro riconoscere nel suo sviluppo quali 2-facce (facce bidimensionali, quadrati) vadano a combaciare nel ripiegamento nell’iperspazio. Per analogia comprendiamo che la faccia superiore e quella inferiore andranno a coincidere nella ricomposizione dell’ipercubo, similmente a quanto accade nello sviluppo del cubo con i lati superiore e inferiore. Questo fa sì che si venga a creare una specie di “ciambella” solida composta da quattro cubi.

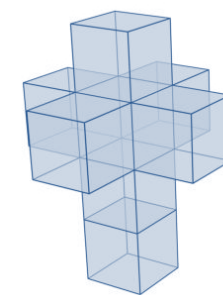
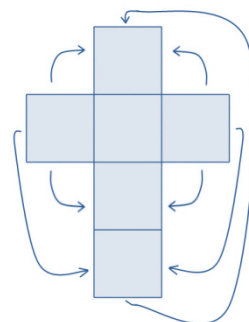


Figura 12: sviluppi di un cubo e di un ipercubo

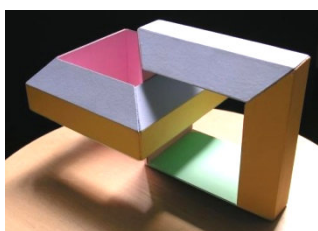


Figura 13: due tori di un ipercubo

Ciò che tuttavia è interessante notare è che anche gli altri quattro cubi (che nello sviluppo potremmo definire, seppur impropriamente, laterali) sono in realtà concatenati nel mondo 4d e formano un’analogia ciambella. Vengono così a formarsi due di queste figure, dette matematicamente “tori”, identiche ed “allacciate” tra loro. Questa particolarità dell’ipercubo permette di raffigurarlo in una modalità insolita e di ardua comprensione (vedi Figura13).

I tori rintracciabili nell'ipercubo sono sei, raggruppati a coppie proprio perché, isolando quattro celle cubiche che ne formano uno, siamo sicuri che i restanti quattro cubi ne vadano a costituire un altro. La rappresentazione che più si presta alla ricerca dei vari "anelli" è lo sviluppo: esistono dei modelli appositamente progettati, come quello osservabile a lato (Figura 14), che semplificano tale studio: le varie facce sono dipinte e le facce colorate del medesimo colore fanno parte dello stesso toro; inoltre dei piccoli magneti interni permettono di assemblare lo sviluppo in maniera corretta con facilità.

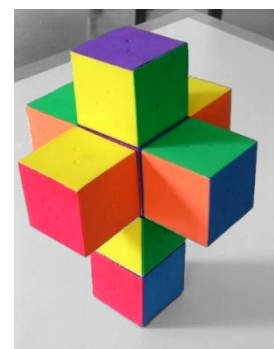


Figura 14: sviluppo colorato di un ipercubo

Occorre notare che esistono diverse possibili composizioni che rappresentano lo sviluppo di un tesseratto, come d'altronde del cubo. Sei quadrati, ad esempio, vanno a creare 35 differenti "esamini", vale a dire poligoni composti appunto da sei quadrati congruenti tra loro collegati l'un l'altro tramite lati in comune. Solo 11 di essi, ripiegati nello spazio 3d, danno forma ad un cubo. Analogamente, tra tutte le possibili disposizioni nello spazio di otto cubi, 261 risultano essere sviluppi distinti di un ipercubo.

## Politopi regolari

*"Eh bien, de même qu'on peut faire sur un plan la perspective d'une figure à trois dimensions, on peut faire celle d'une figure à quatre dimensions sur un tableau à trois (ou à deux) dimensions. Ce n'est qu'un jeu pour le géomètre."*

*Poincaré, La science et l'hypothèse*



Figura 15: due dei dodici tori di un 120-celle

La ricerca matematica non si accontentò del solo tesseratto e cominciò a ricercare altri ipersolidi analoghi ai poliedri regolari. Fino ad allora si era ragionato sui possibili casi di più poligoni regolari raggruppati attorno ad un vertice: l'angolo ottenuto doveva essere minore di  $360^\circ$  per permettere il ripiegamento nella terza dimensione. Analogo procedimento venne escogitato per la dimensione superiore; vennero accostati più poliedri regolari attorno ad uno stesso spigolo, ma a queste condizioni a valere dovevano essere gli angoli diedri. Per angolo diedro si intende l'angolo generato da due semipiani aventi per origine la stessa retta, che assume la funzione di vertice. La sua ampiezza

equivale alla misura dell'angolo piano tracciato dai due semipiani su un piano perpendicolare ad entrambi. Anche nel caso della ricerca dei politopi regolari la somma deve essere inferiore all'angolo giro, per consentire ai solidi di potersi congiungere muovendosi attraverso la quarta dimensione.

Ne consegue l'esistenza di sei politopi regolari, a fronte dei cinque solidi platonici e degli infiniti poligoni regolari. La successione non risultava chiara, ma ulteriori studi resero chiaro che in dimensioni superiori alla quarta, gli  $n$ -solidi regolari sono sempre tre. Anche per i politopi si può ricorrere alla notazione di Schläfli, a patto di aggiungere un terzo valore,  $r$ , corrispondente al numero di poliedri che si uniscono in ogni spigolo.



Figura 16: sessanta dodecaedri formano la metà di un 120-celle

<i>Politopo</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>Descrizione</i>
<i>Ipertetraedro</i>	3	3	3	Tetraedri (angolo diedro di circa 71°) uniti a 3 a 3; totale di cinque celle solide.
<i>16-celle</i>	3	3	4	Sedici tetraedri uniti a 4 a 4.
<i>600-celle</i>	3	3	5	Seicento tetraedri uniti a 5 a 5.
<i>24-celle</i>	3	4	3	Ottaedri (angolo diedro di circa 109°) uniti a 3 a 3.
<i>Ipercubo</i>	4	3	3	Cubi (angolo diedro di 90°) uniti a 3 a 3; totale di otto celle cubiche.
<i>120-celle</i>	5	3	3	Dodecaedri (angolo diedro di circa 138°) uniti a 3 a 3; totale di 120 dodecaedri che formano tori di dieci solidi ciascuno.

Tabella 3: politopi regolari

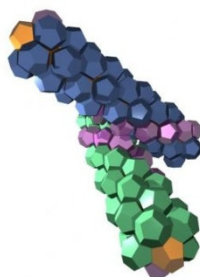


Figura 17: rappresentazione in tre dim. di un 120-celle

Da ultimo, consideriamo la realizzazione di un modello tridimensionale di uno dei politopi, il 120-celle: la costruzione prevede che vengano “impilati” i primi dieci dodecaedri e che questa colonna venga totalmente avvolta da altri 50 dodecaedri. Si ottiene un solido imponente (Figura16) composto da sessanta dodecaedri, la metà dei necessari; ma è sufficiente costruire un'altra “colonna” uguale e legarli assieme come mostrato in Figura17. Immaginare il suo ripiegamento nello spazio a quattro dimensioni può essere ancor più difficile di quanto lo sia nel caso dell'ipercubo, a causa dell'elevato numero di poliedri coinvolti. Tuttavia, basti sapere che le due colonne si richiudono a formare due “ciambelle”, dando vita a dodici tori, composti da dieci dodecaedri ciascuno.

## **BIBLIOGRAFIA**

-  Edwin Abbott Abbott, *Flatlandia*, Adelphi Edizioni, 2002;
-  Fabio Cioffi e Franco Gallo, *I libri di Diálogos voll.D-E*, edizioni scolastiche Mondadori, 2001;
-  Graeme Thomson e Silvia Maglioni, *new Literary Links 3*, Black Cat, 2004;
-  Michele Emmer, *Visibili armonie*, Bollati Boringhieri, 2006;
-  Maria Dedò, *Visualizzare politopi in dimensione4* in *Ricordando Franco Conti*, ed. Scuola Normale Superiore di Pisa, 2004;
-  Robert Heinlein, *La casa nuova* in *Le meraviglie del possibile*, pagg. 201-203, Einaudi, 1959;
-  Rudy Rucker, *La quarta dimensione, un viaggio guidato negli universi di ordine superiore*, Adelphi, 1994;
-  Charles H. Hinton, *Speculations on the Fourth Dimension*, pagg. 1-22, Dover Publications, 1980;
-  Federigo Enriques e Ugo Amaldi, *Elementi di Geometria*, Zanichelli, 1956;
-  Nicola Zingarelli, *Vocabolario della lingua italiana*, Zanichelli, 2004;
-  rivista *Xlatangente*, numeri 4-5-6, 2008;
-  Wikipedia, [it.wikipedia.org](http://it.wikipedia.org);
-  per le immagini: [www.matematita.it](http://www.matematita.it).